

A tanulók előmenetelétől és az osztálytermi gyakorlattól a matematikai kompetenciáig

Ferdinando Arzarello

Matematika Tanszék, Torinói Egyetem, Olaszország

ferdinando.arzarello@unito.it

A második ICME-n tartott plenáris előadásán René Thom a következőket írta: A valódi probléma, mellyel a matematikatanításnak szembesülnie kell, az nem a merevség/szigorúság, hanem a *cél* fejlődésének problémája”. (Thom, 1972: 202. old.) Pontosabban, a *valódi probléma* az osztálytermi matematikai tárgyak/feladatok eredetére összpontosul. Nagyon sok eszköz szükséges, melyből néhány messze túlmutat a formális matematikai kereteken: az ismeretelmélettől az ideggyógyászatig a történelmen, pszichológián, ergonómián keresztül.

Előadásom fő célja ezek közül néhány megvitatása. Az időkeret és érthetőség okán a témát néhány konkrét esettel szemléltetem, főleg a függvény fogalmát illetően (tágabb értelemben a geometriai transzformációktól a Calculus [differenciál- és integrálszámítás] függvényekig). Minden példa más szemszögből mutatja az osztálytermi matematikai fogalmak eredetének kigondolását/vizsgálatát. Ezenkívül talán megmutatják, hogyan szűkítsük a szakadékot az *evilági igazság*, melyben a tanulóink konkrét tapasztalatokat gyűjtenek, és a *logikai igazság* között, amely a matematika szigorú, hivatalos oldalát képviseli. Végül ezek átfogó képet eredményeznek, ahol a két nézőpont nem fog olyan drámaian különbözni, és amelyben a matematikai tárgyak/feladatok léteznek. Valójában az elménk tevékenysége egy integrált és dinamikus egység függvénye, mely egészként működik, s melyek alkotórészei: az agy, a test, a szellemi és testi világ. Amikor a diákok matematikát tanulnak, mindezek az alkotóelemek (és talán még mások is, pl. érzelmi elemek) aktivizálódnak és a tanárnak ezeket tekintetbe kell venni.

Ami a függvényeket illeti, a meglévő szakirodalom számos tanulói zavart analizált, pl. képtelenek helyesen értelmezni egy grafikon jelentését annak globális jellemzőivel, vagy a változók variációs és ko-variációs helyzetét, képtelenek párhuzamot vonni a tér-idő diagram és a térben lévő út között, vagy a grafikon magassága és lejtése között, stb. Minden zavar a függvény egy részének jelentéséhez kapcsolható, amely általában a matematika történetén belül kulturális tapasztalatokban gyökerezik: egy példával illusztrálva, a görbék rajzolásához ismerni kell az ahhoz szükséges módszer alkalmazását. Végül a matematikusok kialakítottak egy jel és szimbólumrendszert és összekötötték azokat a függvény „matematikai” definíciójával, mint egy rendezett halmazpárt két halmaz kartéziánus szorzatában (Bourbaki, 1939, 76. old.). Nagy a szakadék a függvény korai fogalma (pl. Newtonnál, Eulernél) és a halmazelméleten nyugvó absztrakt definíció között. Valójában az első elmélete a konkrét, dinamikus és folyamatos változók közötti összefüggéseken alapult, ahol a helyváltoztatás/mozgás és a változás elgondolása váltotta ki és tartotta fenn a fő koncepciót. Ezzel szemben, az utóbbi elmélete a fogalom csupasz matematikai vázát vezette be, mely a századok folyamán finomodott, de a diákok könnyen elveszhetnek benne. Napjainkban a megfelelő technológiai eszközök megléte előtérbe helyezi a függvények kognitív és kulturális gyökereit, mint olyan tárgyakét, melyek megmutatják, hogyan változnak a dolgok: pl. a dinamikus geometria szoftver esetében, vagy a szonda műszereknél, melyek adatokat gyűjtenek mozgó tárgyakról és emberekről a való időben, és megfelelő módon bemutatják azokat a számítógép képernyőjén.

Ez a jelenség nemcsak az említett példához kötődik, nevezetesen a függvényekhez, hanem általános jellemző.

Napjaink új információs és kommunikációs eszközeinek kiindulópontját N. Balacheff (1997. 113. old) „a matematika új szemiotikájának nevezi” (pl. vonalzó és iránytű, Logo, Cabri geometriája, a „hivatalos” euklideszi vagy transzformációs geometria vonatkozásában, a függvény fogalmának megközelítése a fent vázolt módon, stb.). Nevezetesen, az új technológia az ismeretek újradefiniálásának közvetítője lehet, különösen az iskolai ismereteké. Különösképpen a matematikában ez az eredmény a jelölések és szimbólumok szerepének, és ebből adódóan a fogalmak jelentésének átformálására vonatkozik. (pl. a fogalmak *instrumentális eredetén* keresztül, Rabardel, 1995. értelmezésében).

Valójában az osztálytermekbe bekerülő új technológiát tágabb kulturális értelemben kell elemezni. Ebben a témában érdekes tanulmányt írt J. Kaput, R. Noss és C. Hoyles (2002), akik bevezették az *ábrázoló infrastruktúra* fogalmát:

Az új számítási formák és irodalmak megjelenése áthatja az egyének és ugyanúgy a nemzetek társadalmi és gazdasági életét...

A valódi változások nem technikaiak, hanem kulturálisak. Ezek megértése... az emberek, és nem a tárgyak közti társadalmi kapcsolatok kérdése...

A jelölési rendszer – amit gondolataink bemutatására és újra bemutatására használunk magunk és mások számára, amellyel létrehozunk, és térben és időben kommunikálunk feljegyzéseket, és amellyel alátámasztjuk az érvelést és a kalkulációt – bármely civilizációs infrastruktúra központi részét képezi. Ami az infrastruktúrát általában illeti, akkor működik a legjobban, amikor az természetes, láthatatlan, egyszerűen csak „működik”.

Ez azt jelenti, hogy az Információs és Kommunikációs Technológiákat az osztályteremben két szempontból kell megvizsgálnunk:

a) mint *Kulturális Jeltani Rendszereket*, nevezetesen olyan kulturális rendszereket, melyek által változatos jelentés-teremtő források érhetők el speciális, kifejező társadalmi gyakorlatokon keresztül (ennek koncepciója L. Radford-nak tulajdonítható, 2003). Ezeket a gyakorlatokat nem (csak) a szigorúan vett iskolai környezetben kell tekintetbe venni, de az egész társadalom tágabb környezetében is, a történelem folyamába ágyazva.

b) mint *Belső Kognitív Stimulálók*, melyek olyan belső logikájú közvetítők, amelyek kognitív rezonanciába lépnek a témákkal (ez az elképzelés végeredményben E. Fischbein *intuitív modell* elméletéből származik, 1987).

Ez lehetővé teszi a tanár számára a tanulási kontextus megtervezését és lefolytatását, amely magában foglal különböző természetű komponenseket, pl. testi és kulturális alapúakat.

Kutatóink néhány példája bemutatja a kulturális, biológiai és kognitív nézőpontok közti komplex kölcsönhatást a *tárgyasítási folyamatokban* (Radford, 2002), mely különféle speciális kontextusokon belüli matematikai fogalmak megalkotását kíséri, melyekben új technológiák vannak jelen (pl. célok ábrázolása függvényekkel). A példákat az eszközök szerint analizálták: ismeretelmélet, szemiotika (jeltan), pszichológia, ideggyógyászat. Ezek lehetővé teszik, hogy rámutassunk a matematikai entitások tárgyasítási folyamatának különböző alkotóelemeire, pl. a függvényekre. Ilyen összetevők sűrűsödnek össze abban, amit én *kognitív akció-, alkotó és kommunikációs térnek* hívok, (Arzarello, nyomtatva). Az APC-tér felépült, továbbfejlődött és részt vesz az osztályteremben. Fő alkotórészei a következők:

- a test
- a fizikai világ
- a kulturális környezet.

Az APC terek az ábrázoló infrastruktúra didaktikus megfelelői. Nevezetesen, az APC alkotóelemek megfelelően mutatják be a tanulási folyamatot egy rendszeren belül, melyet egy ábrázoló infrastruktúra két dimenziójának [a) és b) feljebb] megfelelően alakítottak ki. Az osztályteremben felépült APC-tér egy dinamikus, egységes rendszer, melyben a különböző alkotóelemek egy egységes egészbe integrálódnak. Az integráció a tanulók közti interakció, a tanár közvetítése és mesterségesen előidézett interakciók eredménye.

A három nagybetű, az A P és C a dinamikus jellemzőket illusztrálja, nevezetesen azt a tényt, hogy három fő összetevő jellemzi a matematikatanulást: a diákok akciói és interakciói (társaikkal, a tanárral, saját magukkal és eszközökkel), az ő alkotásuk (pl. válaszadás egy kérdésre, kérdések feltevése, stb.), és a kommunikációs aspektus (pl. amikor a megtalált megoldást továbbadja a társának, a tanárnak megfelelően módon).

A bemutatásban használni fogom az APC tér és az ábrázoló infrastruktúra kifejezéseket, melyekkel illusztrálok azt a tanítási kísérletet, melyet kutatócsoportunk (L. Bazzini, O. Robutti, D. Paola, F. Ferrara, C. Sabena) Torinóban fejlesztett ki az elmúlt években, ahol függvényeket és pre-calculusokat alkalmaztunk a 9. évfolyamtól kezdve különféle technológiai környezet szisztematikus használatával.

Felvázolom a deduktív analízist, mely együtt jár a függvény fogalmának mind *megtestesült*, mind *kulturális* természetével, valamint néhány következtetésünket. Bemutatom, hogy az APC-tér modell lehetővé teszi az ún. *észlelő-motoros* jellegzetességek megfelelő tanulmányozását az ismeret-folyamatokban (Antinucci, 2001; Nemirovsky és Borba, 2003), mely döntő fontosságúnak mutatkozott a tanulásában a technológiai környezetekben. Nevezetesen, lehetővé teszi annak bemutatását, hogy az akció és az észlelés hogyan határozza meg a tanulási folyamatokat és annak bemutatását, hogy a cselekvés, érintés, mozgás és látás ezek fontos alkotórészei. Bemutatom, hogy az észlelő-motoros tevékenységen alapuló tanulási folyamatok megfelelő tanítási módokat igényelnek, ahol a diákok aktívan részt vesznek a matematikai koncepciók megszerkesztésében. A tanítási kísérleteink eredményei, minden korlátukkal egyetemben, megerősítik, hogy ez a megközelítés egy hasznos kutatási eszköz annak megértésében, hogyan közvetítik/segítik a technológiai eszközök a diákok matematikai tudásának felépítését. Valójában az osztályteremben használt technikai eszközök kulturális és kognitív alkotóelemeinek vizsgálata lehetővé teszi a technológia által nyújtott, értéknövelt komponens átgondolását, mely nincs csupán technikai jellemzőkre korlátozva. Az APC-tér alkotóelemei lehetővé teszik annak figyelembe vételét is, hogy az elvárt tudás kialakulása nemcsak egy játék eredménye, melyet határozottan a tárgyak és a „milieu” közötti kapcsolatokra korlátoztak (Brousseau, 1997), de egy olyan környezetben, ahol a „játék” olyan szemiotikai közvetítőkből áll, mint a tanulók, az IKT és a tanár, aki irányítja és segíti az egyéni érzékek kifejlődését, amelyet a tanulók összekapcsolnak az IKT-s tevékenységükkel a tudományos érzék kifejlesztése céljából. A tanár szerepe abban áll, hogy elősegítse a matematikai gondolkodás kulturális és biológiai gyökereinek integrálódását a megfelelő ábrázoló infrastruktúrába. Ez a megközelítés lehetővé teszi a

tanulóknak lévő kognitív rezonancia táplálását, és a *természetes környezetben* való tanulás kialakulását. (Az elgondolás Tall-tól származik, 2001.)

Az akció, alkotás és kommunikáció tere túlmegy a Vygotsky nevével fémjelzett technikai és pszichológiai eszközök merev megkülönböztetésén (Vygotsky, 1978, 53. oldal). Tulajdonképpen egy minapi neurológiai vizsgálat (pl. Gallese, 2003.) mutatja be az ábrázoló és fogalmi tartalmat, mint egy szervezet most zajló modellező folyamatának eredményét, ahogy jelenleg integrálódik a bemutatandó tárggyal.

Referenciák

- Antinucci, F. (2001). *La scuola si è rotta*. Bari: Laterza.
- Arzarello, F. (in print). Mathematical landscapes and their inhabitants: perceptions, languages, theories, *Proceedings ICME 10*, Plenary Lecture.
- Balacheff, N. (1997). Construction of meaning and teacher control of learning. In: Tinsley, D. & Johnson, D.C. (Eds.), *Information and Communication technologies in school mathematics*. London: Chapman & Hall, 111-120.
- Bourbaki, N. (1939). *Théorie des ensembles*, Paris: Hermann (1966).
- Brousseau, G. (1997). *The theory of didactic situations*, Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic.
- Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics*. Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic.
- Gallese, V. (2003). 'A neuroscientific grasp of concepts: from control to representation'. *Philosophical Transaction: Biological Sciences*, **358**(1435), 1231-1240. London: Royal Society.
- Kaput, J., Noss, R. & Hoyle, C. (2002). Developing New Notations for a Learnable Mathematics in the Computational Era, in: English, L. D. (Editor), *Handbook of International Research in Mathematics Education*, Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 51-75.
- Nemirovsky, R. & Borba, M. (2003). 'Perceptuo-Motor Activity and Imagination in Mathematical Learning'. *Research Forum, Proceedings of PME 27*, Hawai-i, **1**, 101-135.
- Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies*, Paris: Armand Colin.
- Radford, L. (2002). 'The seen, the spoken and the written. A semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge'. *For the Learning of Mathematics*, **22**(2), 14-23.
- Tall D. (2001). Conceptual and Formal Infinities, *Educational Studies in Mathematics*, **48** (2&3), 199-238.
- Thom, R. (1972). 'Modern mathematics: does it exist?' in: Howson, A.G. (Ed.), *Developments in Mathematical Education*, Proc. of ICMI 2, Cambridge: Cambridge University Press, 194-209.
- Vygotskij L. S. (1978). *Mind in Society. The Development of Higher Psychological Processes*, Harvard: Harvard University Press.